Rationale Zahlen und rationale Funktionen: Was ist ihnen gemeinsam? Wie werden sie dargestellt?

Franz Pauer und Florian Stampfer (Universität Innsbruck)

1. Einleitung

In der Sekundarstufe 1 lernen die Schülerinnen und Schüler die ersten Zahlbereichserweiterungen kennen: zuerst die von den natürlichen Zahlen zu den nicht-negativen rationalen Zahlen und dann die von diesen zu allen rationalen Zahlen. Diese Erweiterungen werden in der Mathematikdidaktik intensiv diskutiert, siehe Wartha (2018) und die dort zitierte Literatur. Die rationalen Zahlen (oder Bruchzahlen) und das Rechnen damit nehmen einen guten Teil des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe 1 in Anspruch. Dieser Zahlbereich muss aus mehreren Gründen sehr sorgfältig eingeführt werden. Einerseits, weil fast alle Rechnungen im Alltag (insbesondere die mit einem Taschenrechner) mit rationalen Zahlen – vor allem mit Dezimalzahlen (das sind rationale Zahlen, die durch Dezimalziffern dargestellt werden können) – ausgeführt werden. Andererseits, weil in der Sekundarstufe 2 ein Analogon der rationalen Zahlen, die rationalen Funktionen, besprochen wird. Es sollte deshalb schon bei der Einführung der rationalen Zahlen die algebraische Idee des Quotientenkörpers von nullteilerfreien kommutativen Ringen so durchschimmern (natürlich ohne dass diese Fachworte der Algebra verwendet werden), dass Schülerinnen und Schüler diese Idee bei der Einführung der rationalen Funktionen wiedererkennen.

Dieser Beitrag beginnt zur Motivation (noch in der Einleitung) mit zwei Beispielen, die Brüche von ganzen Zahlen und von Polynomen erfordern.

Dann werden die rationalen Zahlen als Eigenschaften von Paaren ganzer Zahlen (deren Verhältnis) eingeführt und die Addition und Multiplikation von rationalen Zahlen motiviert und definiert.

Anschließend werden Dezimalzahlen als rationale Zahlen, deren Nenner eine Zehnerpotenz sein kann, eingeführt und es wird gezeigt, dass zwar nicht jede rationale Zahl eine Dezimalzahl ist, aber beliebig genau durch eine solche angenähert werden kann.

Ein alternativer Zugang zu rationalen Zahlen ist, sie nach den reellen Zahlen einzuführen und dann rationale Zahlen als Quotienten von ganzen Zahlen zu definieren. Da in der Sekundarstufe 1 noch nicht von Grenzwerten gesprochen werden kann, können dort reelle Zahlen nur geometrisch eingeführt werden, nämlich als Punkte einer Zahlengeraden.

Im zweiten Teil dieses Artikels werden rationale Funktionen analog zu rationalen Zahlen als Eigenschaften von Paaren von Polynomen eingeführt und ihre Addition und Multiplikation auch analog definiert.

Der Zifferndarstellung von rationalen Zahlen entspricht bei rationalen Funktionen die Darstellung als Laurentpolynom. Der Einbettung von rationalen Zahlen in die Zahlengerade entspricht die Interpretation von rationalen Funktionen als reellwertige Funktionen.

Abschließend wird die Partialbruchzerlegung von rationalen Funktionen und von rationalen Zahlen besprochen.

1.1. Probleme mit Meiers Apfelsaft

Am Sonntag trinkt Herr Meier zusammen mit 6 Nachbarn insgesamt 2 Liter Apfelsaft, jeder Person wurde immer gleich viel eingeschenkt.
Am Montag trinkt Herr Meier zusammen mit 10 Arbeitskollegen (keiner davon war auch am Sonntag dabei) insgesamt 3 Liter desselben Apfelsaftes, auch diesmal wurde jeder Person immer gleich viel eingeschenkt.
Am Dienstag hat Herr Meier Magenschmerzen und geht zusammen mit einer weiteren Flasche seines Apfelsaftes zum Arzt. Im Labor wird festgestellt, dass 3 Promille des Flascheninhaltes nicht Saft, sondern

Reinigungsmittel sind. Der Arzt erklärt, dass bis zu 1 ml dieses Reinigungsmittel unschädlich sind, mehr davon aber zu Beschwerden führen.
Könnte das Reinigungsmittel der Grund für die Beschwerden von Herrn Meier sein? Muss er seine Gäste davon informieren?

Wieviel Reinigungsmittel hat Herr Meier getrunken? Am Sonntag $\frac{3}{1000}$ mal $\frac{2}{7}$ Liter, am Montag $\frac{3}{1000}$ mal $\frac{3}{11}$ Liter, wegen

$$\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{11}\right)\cdot\frac{3}{1000}=\frac{129}{77}\cdot\frac{1}{1000}>\frac{1}{1000},$$

könnten Herrn Meiers Beschwerden vom Reinigungsmittel verursacht worden sein.
Seine Nachbarn haben am Sonntag $\frac{3}{1000}$ mal $\frac{2}{7}$ Liter Reinigungsmittel getrunken. Wegen

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{1000}=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{1000}<\frac{1}{1000}$$

haben sie keine Beschwerden zu befürchten.
Ebenso nicht seine Kollegen am Montag, weil

$$\frac{3}{11}\cdot\frac{3}{1000}=\frac{9}{11}\cdot\frac{1}{1000}<\frac{1}{1000}$$

ist.

Um diese Aufgabe lösen zu können, muss bekannt sein

- was rationale Zahlen (Bruchzahlen) sind
- was die Summe und was das Produkt von zwei rationalen Zahlen ist
- was es bedeutet, dass eine rationale Zahl kleiner bzw. größer als eine andere ist
- und welche Rechenregeln für rationale Zahlen gelten.

1.2. Endliche geometrische Reihen

Wir stellen Polynome mit Hilfe des Symbols x dar. Für $n \geq 1$ ist dann

$$(1+x+\cdots+x^n)\cdot(1-x)=1-x^{n+1},$$

also

$$\sum_{i=0}^{n} x^i=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} x^i=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-1=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\,.$$

Dabei stellen sich die folgenden Fragen:

- Was ist die *rationale Funktion* $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$?
- Was sind die Summe und das Produkt von zwei rationalen Funktionen?
- Welche Rechenregeln gelten für rationale Funktionen?

2. Rationale Zahlen (Bruchzahlen)

2.1. Was sind rationale Zahlen?

Gibt es eine Lösung der folgenden Aufgabe?

„Finde eine Zahl z so, dass $7 \cdot z = 2$ ist.“

Es ist klar, dass eine solche Zahl keine natürliche Zahl sein kann. Da diese Aufgabe durch das Zahlenpaar $(2,7)$ beschrieben wird, liegt es nahe, ihre Lösung als das Zahlenpaar $(2,7)$ zu definieren.
(Diese Idee wird bei der Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ erfolgreich angewendet: Komplexe Zahlen können als Paare von reellen Zahlen aufgefasst werden, also $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$. Die Addition wird komponentenweise definiert und die Multiplikation so, dass $(1,0)$ das Einselement ist, $(0,1)^2 := (-1,0)$ und die Rechenregeln der reellen Zahlen weiterhin gelten.)
Die Erweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ oder von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$ ist aber schwieriger als die von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$, denn: Für jede Zahl $t \neq 0$ sollten die Aufgaben

„Finde eine Zahl z so, dass $(7 \cdot t) \cdot z = 2 \cdot t$ ist“

dieselbe Lösung haben, für $t \neq 1$ ist aber $(2,7) \neq (2 \cdot t, 7 \cdot t)$!

Nehmen wir an, wir haben einen Zahlbereich gefunden, in dem die gleichen Rechenregeln wie für ganze Zahlen gelten und in dem die Aufgaben

„Finde eine Zahl y so, dass $b \cdot y = a$ ist“ und „Finde eine Zahl z so, dass $d \cdot z = c$ ist“

eine Lösung haben. Dabei wird vorausgesetzt, dass b und d nicht 0 sind. Dann sind die Lösungen dieser zwei Gleichungen genau dann gleich, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ ist.

Denn: Wenn die Lösungen gleich sind, also $y = z$ ist, dann ist

$$a \cdot d = b \cdot y \cdot d = b \cdot z \cdot d = b \cdot c\,.$$

Ist umgekehrt $b \cdot c = a \cdot d$, dann ist

$$b \cdot d \cdot z = b \cdot c = a \cdot d = b \cdot d \cdot y.$$

Aus $b \cdot d \neq 0$ folgt nun $y = z$.

Wir sagen, dass Paare ganzer Zahlen (a,b) und (c,d) mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$ das *gleiche Verhältnis haben*, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ ist. Wir fassen alle Zahlenpaare (c,d), die das gleiche Verhältnis wie (a,b) haben, zu einer Menge zusammen und nennen diese *die durch den Zähler a und den Nenner b gegebene rationale Zahl* $\frac{a}{b}$. Eine rationale Zahl ist also nicht ein Zahlenpaar, sondern eine Eigenschaft von Zahlenpaaren, ihr „Verhältnis“.

Daher ist

$$\frac{2}{7} := \{(c,d) \,|\, c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, 2 \cdot d = 7 \cdot c\}$$

und allgemein für $a,b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$

$$\frac{a}{b} := \{(c,d) \,|\, c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, a \cdot d = b \cdot c\}.$$

Für $a,b,a',b' \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ und $b' \neq 0$ sind die Mengen $\{(c,d) \,|\, c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, a \cdot d = b \cdot c\}$ und $\{(c,d) \,|\, c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, a' \cdot d = b' \cdot c\}$ entweder gleich oder disjunkt.

Wir schreiben

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \,|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

für die Menge der rationalen Zahlen (oder synonym: Bruchzahlen).

Man kann ganz allgemein Eigenschaften so beschreiben: eine Eigenschaft ist die Menge aller Gegenstände, die diese Eigenschaft haben. Die Eigenschaft (von Mengen) „vier" oder „hat vier Elemente" kann man so als Menge aller Mengen mit vier Elementen beschreiben, oder die Eigenschaft „grün" als Menge aller grünen Gegenstände. (Wir verwenden hier den Begriff Menge naiv, die zwei letztgenannten „Mengen" sind eigentlich „zu groß" für Mengen und nur Klassen).

Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 1 sollten jedenfalls das folgende über rationale Zahlen wissen:

- Die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ ist durch das Paar (a,b) von ganzen Zahlen (*Zähler* a, *Nenner* $b \neq 0$) eindeutig bestimmt.
- Aber: es gibt viele Paare (Zähler, Nenner), die dieselbe rationale Zahl darstellen.
- Es ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ ist.

Um zu vermitteln, was $\frac{2}{7}$ bedeutet, muss man mehrere Situationen zeigen, die durch das Zahlenpaar $(2,7)$ (oder $(4,14), \ldots$) beschrieben werden können, denen allen das Verhältnis dieser zwei Zahlen gemeinsam ist: zum Beispiel
- 2 Flaschen Saft und 7 Personen, oder
- ein Rechteck mit Fläche 2 dm^2, das in 7 gleich große Teile unterteilt ist, oder
- 4 Stück einer in 14 gleiche Teile geschnittenen Torte, oder
- ....

Jede ganze Zahl a ist Lösung der Aufgabe „Finde eine Zahl z so, dass $1 \cdot z = a$ ist", daher fassen wir a und $\frac{a}{1}$ als gleich auf und somit auch $\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$.

2.2. Rechnen mit rationalen Zahlen

Wir erweitern jetzt die Addition und die Multiplikation von ganzen Zahlen so auf $\mathbb{Q}$, dass dafür dieselben grundlegenden Rechenregeln wie für ganze Zahlen (das sind die Rechenregeln eines kommutativen Ringes) gelten. Für alle ganzen Zahlen a,b,c,d mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$ muss nach Definition $b \cdot \frac{a}{b} = a$ und $d \cdot \frac{c}{d} = c$ sein. Daher ist

$$(b \cdot d) \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) = (b \cdot d) \cdot \frac{a}{b} + (b \cdot d) \cdot \frac{c}{d} = d \cdot a + b \cdot c,$$

also ist $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ Lösung der Aufgabe „Finde eine Zahl z so, dass $(b \cdot d) \cdot z = d \cdot a + b \cdot c$ ist". Daher müssen die Summe (und nach analoger Überlegung) das Produkt so definiert werden:

- $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$
- $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Für den Schulunterricht empfehlen wir, zuerst die Summe von rationalen Zahlen mit gleichem Nenner zu definieren, die Definition

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} := \frac{a + c}{b}$$

erscheint plausibel. Da je zwei rationale Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ immer mit gleichem Nenner angeschrieben werden können ($\frac{a\cdot d}{b\cdot d}$ und $\frac{c\cdot b}{d\cdot b}$), ist durch die Addition von rationalen Zahlen mit gleichem Nenner auch der allgemeine Fall festgelegt.

Zur Definition von Summe und Produkt ist die folgende Eigenschaft ganzer Zahlen wichtig:
aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt $a \cdot b \neq 0$ (der Nenner der Summe und des Produktes darf ja nicht 0 sein).

Wegen $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ (falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$) kann durch alle rationalen Zahlen $\neq 0$ dividiert werden:

$$\frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b \cdot c}{a \cdot d}.$$

Die Division von rationalen Zahlen ist die Umkehrung der Multiplikation. Mit ihr wird zwei rationalen Zahlen eine weitere rationale Zahl, der Quotient der ersten zwei, berechnet. Die Division von rationalen Zahlen darf nicht mit der „Division mit Rest“ verwechselt werden, diese ist nur für ganze Zahlen definiert und berechnet zwei Zahlen, den (ganzzahligen) Quotienten und den Rest.

2.3. Rechenregeln für rationale Zahlen

Mit rationalen Zahlen können alle vier Grundrechnungsarten ausgeführt werden (außer der Division durch 0). Es gelten dabei die Rechenregeln eines *Körpers*:

- man kann bei Addition und Multiplikation Klammern weglassen (für alle rationalen Zahlen u, v, w ist $(u+v)+w = u+(v+w)$ und $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$),
- es kommt beim Addieren bzw. Multiplizieren nicht auf die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren an (für alle rationalen Zahlen u, v ist $u+v = v+u$ und $u \cdot v = v \cdot u$),
- man darf herausheben und ausmultiplizieren
(für alle rationalen Zahlen u, v, w ist $(u+v) \cdot w = (u \cdot v) + (u \cdot w)$),
- Addition bzw. Multiplikation (außer mit 0) können durch Subtraktion bzw. Division rückgängig gemacht werden (für alle rationalen Zahlen $u \neq 0$ gibt es eine rationale Zahl v und eine rationale Zahl w so, dass $u+v = 0$ und $u \cdot w = 1$ ist),
- Addition von 0 und Multiplikation mit 1 ändern nichts (für alle rationalen Zahlen u ist $u+0 = u$ und $u \cdot 1 = u$).

2.4. Zifferndarstellung von rationalen Zahlen

Rationale Zahlen, deren Nenner eine Zehnerpotenz sein kann, wie

$$9 = \frac{9}{1}, \frac{3}{10}, \frac{12}{100}, \frac{1}{250} = \frac{4}{1000}, \ldots$$

heißen Dezimalzahlen.

Dezimalzahlen werden platzsparend durch Dezimalziffern und einen Punkt (oder ein Komma) dargestellt: man schreibt die Dezimalziffern des Zählers an und schreibt anstatt des Bruchstrichs und des Nenners 10^k eine Punkt (oder ein Komma) vor die (von rechts gelesene) k-te Ziffer:

$$0.3 := \frac{3}{10},\ 3.21 := \frac{321}{100},\ 91.004 := \frac{91004}{1000},\ \ldots$$

Summe, Differenz und Produkt von Dezimalzahlen sind Dezimalzahlen. Alle ganzen Zahlen sind Dezimalzahlen.
Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren von Dezimalzahlen erfordert weniger Rechenaufwand als von

beliebigen Bruchzahlen. Bei der Multiplikation von Dezimalzahlen müssen nur die Zähler multipliziert der Punkt (oder das Komma) geeignet gesetzt werden :

$$\frac{a}{10^m} \cdot \frac{c}{10^n} = \frac{a \cdot c}{10^{m+n}}.$$

Bei der Addition von Dezimalzahlen muss der Zähler des Summanden mit weniger Ziffern nach dem Punkt (oder Komma) zuerst mit einer geeigneten Zehnerpotenz multipliziert werden und anschließend die (neuen) Zähler addiert und der Punkt (oder das Komma) geeignet gesetzt werden:

$$\frac{a}{10^m} + \frac{c}{10^n} = \frac{a \cdot 10^{n-m} + c}{10^n} \text{ (falls } n \geq m).$$

Die schlechte Nachricht: Nicht alle rationalen Zahlen sind Dezimalzahlen, zum Beispiel sind $\frac{1}{3}$ und $\frac{123}{11}$ keine Dezimalzahlen.

Die gute Nachricht: Alle rationalen Zahlen können beliebig genau durch Dezimalzahlen angenähert werden.
Zu jeder positiven rationalen Zahl $\frac{c}{d}$ und jeder natürlichen Zahl p gibt es eine eindeutig bestimmte Dezimalzahl $\frac{a}{10^p}$ so, dass

$$0 \leq \frac{c}{d} - \frac{a}{10^p} < 10^{-p}$$

ist.

Diese Näherung (wenn Zähler und Nenner positiv sind) kann mithilfe der Division mit Rest von ganzen Zahlen berechnet werden.
Dividiere $c \cdot 10^p$ mit Rest durch d:

$$c \cdot 10^p = a \cdot d + r, \ 0 \leq r < d.$$

Dann ist $\frac{a}{10^p}$ die gesuchte Dezimalzahl, sie kann durch Dezimalziffern mit höchstens p Ziffern nach dem Punkt bzw. Komma dargestellt werden.

Fast alle Rechnungen im Alltag (händisch oder mit einem Taschenrechner) werden mit Dezimalzahlen ausgeführt. Wenn die Quotienten von Dezimalzahlen keine Dezimalzahlen sind, werden diese gerundet.

2.5. Einführung rationaler Zahlen, wenn reelle Zahlen bekannt sind

Häufig werden reelle Zahlen in der Sekundarstufe 1 als Punkte auf einer *Zahlengeraden* eingführt. Eine Zahlengerade ist eine Gerade, auf der zwei Punkte ausgewählt und mit 0 und 1 bezeichnet wurden.
Punkte auf dieser Zahlengeraden sind dann zum Beispiel 2, -3, $\sqrt{2}$ oder π.
Es genügt aber nicht, reelle Zahlen nur als Punkte einzuführen, man muss dafür auch die Addition und die Multiplikation definieren. Während die Addition von Punkten P und Q sehr einfach als das „Aneinanderlegen“ der Strecken von 0 nach P und von 0 nach Q definiert (und mit Bleistift, Lineal und Dreieck exakt ausgeführt) werden kann, ist das bei der Multiplikation schwieriger. Wie soll zum Beispiel $\sqrt{2} \cdot \pi$ definiert werden? (Diese Frage tritt zum Beispiel auf, wenn das Volumen einer zylinderförmigen Dose mit Radius 1 dm und Höhe $\sqrt{2}$ dm berechnet werden soll).
Auch das Produkt von Punkten auf der Zahlengeraden kann geometrisch mit Hilfe von Bleistift, Lineal und Dreieck definiert werden, siehe zum Beispiel Pauer et al. (2011) Kap. 1.2.

Wenn die reellen Zahlen bereits bekannt sind, müssen rationale Zahlen nicht definiert, sondern als eine gewisse Teilmenge der Zahlengeraden eingeführt werden: Ganze Zahlen sind jene Punkte der Zahlengeraden, die man durch mehrfache Addition von 1 bzw. -1 erhält. Rationale Zahlen sind dann jene Punkte, die man als Quotienten von ganzen Zahlen erhält.

2.6. Darstellung rationaler Zahlen als Grenzwerte von Folgen von Dezimalzahlen

Die Folge

$$(0.3, 0.33, 0.333, \ldots, 0.\underbrace{333\ldots333}_{n}, \ldots)$$

ist wegen

$$0.3 = 3 \cdot \frac{1}{10}, 0.33 = 3 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100}\right), 0.333 = 3 \cdot \left(\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}\right)$$

$$0.333\ldots333 = 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{10^i} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{10} - (\frac{1}{10})^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{\frac{1}{10} - \frac{1}{10}^{n+1}}{1 - \frac{1}{10}} = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

eine konvergente geometrische Reihe mit Grenzwert $\frac{1}{3}$.

In der Sekundarstufe 2 kann man nach der Einführung der Begriffe Folge, endliche geometrische Reihe, konvergente Folge und Grenzwert die *periodischen Zahlen* als Grenzwerte entsprechender Folgen von Dezimalzahlen einführen und diskutieren.

Da jede rationale Zahl beliebig genau durch eine Dezimalzahl angenähert werden kann, ist jede rationale Zahl Grenzwert einer Folge von Dezimalzahlen.

Diese Folge ist aber nicht eindeutig bestimmt: Zum Beispiel ist die Zahl 1 Grenzwert der Folge

$$(1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots),$$

aber auch Grenzwert $0.\dot{9}$ der Folge

$$(0.9, 0.99, 0.999, \ldots, 0.999\ldots999, \ldots).$$

In der Sekundarstufe 1 fehlen die Voraussetzungen für eine verstehbare Erklärung des Begriffs „periodische Zahl". Es könnten leicht auch falsche Vorstellungen entstehen, zum Beispiel, dass
$1 = 0.\dot{9} = 0.9999\ldots$ als Zifferndarstellung von 1 fehlinterpretiert wird. Daher sollte dieses Thema in der Sekundarstufe 1 nicht angesprochen werden, es gibt in dieser Schulstufe ja auch keine Anwendungen davon.

3. Rationale Funktionen

3.1. Was sind rationale Funktionen?

Polynome mit rationalen, reellen oder komplexen Koeffizienten haben viel mit ganzen Zahlen gemeinsam: neben den grundlegenden Rechenregeln (cf. 2.3) auch die Eigenschaft, dass das Produkt von Polynomen nur dann 0 ist, wenn das schon einer der Faktoren ist. Vor allem gibt es auch für Polynome die Division mit Rest. Daraus ergibt sich, dass fast jeder Satz über ganze Zahlen ein Analogon für Polynome hat (siehe zum Beispiel Pauer, 2005).

Wir schreiben im weiteren Polynome (mit reellen Koeffizienten) mit Hilfe des Symbols x an, zum Beispiel sind

$$3x^4 - 2x^2 + 5x - 6,\ \pi x - \sqrt{3},\ x,\ 8$$

Polynome.
Wir können sie als Polynomfunktionen auffassen, dann steht x für die identische Funktion (für alle reellen Zahlen t ist $x(t) = t$).

Die Aufgabe „Finde z so, dass $(x^2 + 3x + 1) \cdot z = x - 1$ ist“ hat kein Polynom als Lösung.

Wir lassen uns von denselben Überlegungen wie in 2.1 leiten und betrachten das Verhältnis des Paares von Polynomen $(x-1, x^2+3x+1)$, also

$$\frac{x-1}{x^2+3x+1} := \{(c,d) \,|\, c,d \text{ Polynome, } \ d \neq 0, (x^2+3x+1) \cdot c = d \cdot (x-1)\}$$

als Lösung dieser Aufgabe. Wir nennen sie in Analogie zu rationalen Zahlen eine *rationale Funktion* (in manchen Schulbüchern werden sie *Bruchterme* genannt).

Wir schreiben $\mathbb{R}(x)$ für die Menge

$$\left\{\frac{a}{b} \,|\, a,b \text{ Polynome (mit reellen Koeffizienten), } \ b \neq 0\right\}$$

aller rationalen Funktionen.

Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 2 sollten jedenfalls das folgende über rationale Funktionen wissen:

- Die rationale Funktion $\frac{a}{b}$ ist durch das Paar von Polynomen (a,b) (*Zähler* a, *Nenner* $b \neq 0$) eindeutig bestimmt.
- Aber: es gibt viele Paare (Zähler, Nenner), die dieselbe rationale Funktion darstellen.
- Es ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ ist.

3.2. Rechnen mit rationalen Funktionen

Die Definition von Addition und Multiplikation von rationalen Funktionen wird auf dieselbe Weise wie die von rationalen Zahlen motiviert und eingeführt. Für Polynome a,b,c,d mit $b \neq 0$, $d \neq 0$ definieren wir

- $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$
- $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Zur Definition von Summe und Produkt ist die folgende Eigenschaft von Polynomen wichtig:
aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ folgt $a \cdot b \neq 0$.

Wegen $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ (falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$) kann durch alle rationalen Funktionen $\neq 0$ dividiert werden:

$$\frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b \cdot c}{a \cdot d}.$$

Zu beachten: Die Division von rationalen Funktionen ist die Umkehrung der Multiplikation. Die „Division mit Rest von Polynomen“ ist nur für Polynome definiert.

3.3. Rechenregeln für rationale Funktionen

Mit rationalen Funktionen können alle vier Grundrechnungsarten ausgeführt werden (außer der Division durch 0). Es gelten dabei die Rechenregeln eines *Körpers*, siehe 2.3.

3.4. Laurentpolynome – das Analogon zu Dezimalzahlen

Rationale Zahlen, deren Nenner eine Potenz von $x-1$ sein kann, wie

$$\frac{3}{x-1}, \frac{x^5+1}{(x-1)^3}, \frac{1}{(x-1)^{10}}, \ldots$$

heißen *Laurentpolynome mit Entwicklungspunkt* 1.

Es könnte auch jede andere reelle Zahl als Entwicklungspunkt genommen werden. Wir betrachten im weiteren aber nur Laurentpolynome mit Entwicklungspunkt 1.

Summe, Differenz und Produkt von Laurentpolynomen sind Laurentpolynome. Alle Polynome sind Laurentpolynome.
Aber: Nicht jede rationale Funktion ist ein Laurentpolynom, zum Beispiel $\frac{1}{x^2+1}$ nicht.

Jedes Polynom kann in der Form

$$\sum_{i=0}^{n} c_i(x-1)^i, \text{ mit } c_i \in \mathbb{R},$$

geschrieben werden (man erhält die Zahlen c_i entweder durch mehrfache Division mit Rest durch $x-1$ oder indem statt x immer $(x-1)+1$ geschrieben, dann ausmultipliziert und schließlich nach Potenzen von $x-1$ zusammengefasst wird).

Daher kann jedes Laurentpolynom in der Form

$$\sum_{i=-p}^{n} d_i(x-1)^i, \text{ mit } d_i \in \mathbb{R},$$

geschrieben werden (Die Zahlen d_i sind die „Ziffern zur Basis $x-1$“ dieser rationalen Funktion).

Zum Beispiel ist

$$\frac{x^5+1}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+2}{(x-1)^3} =$$

$$= (x-1)^2+5(x-1)+10+\frac{10}{(x-1)}+\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\,.$$

3.5. Interpretation rationaler Funktionen als Funktionen

Mit Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ kann gerechnet werden:

$f+g$ ist die Funktion mit $(f+g)(t) := f(t)+g(t)$

$f \cdot g$ ist die Funktion mit $(f \cdot g)(t) := f(t) \cdot g(t)$

Dabei gelten dieselben grundlegenden Rechenregeln wie für das Rechnen mit ganzen Zahlen (genauer gesagt die Rechenregeln eines kommutativen Ringes, das sind die in 2.3 angeführten mit Ausnahme der Möglichkeit der Division), siehe zum Beispiel Pauer & Stampfer (2014). Ein wichtiger Unterschied zum Rechnen mit ganzen Zahlen ist, dass wenn ein Produkt von Funktionen die Nullfunktion ist, nicht notwendig folgt, dass das auch einer der Faktoren ist.

Für eine Funktion f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$N(f) := \{t \in \mathbb{R} \,|\, f(t) = 0\}$$

die Menge ihrer Nullstellen.

Eine rationale Funktion $\frac{a}{b}$ kann durch

$$\frac{a}{b}(t) := \frac{a(t)}{b(t)}$$

als reellwertige Funktion aufgefasst werden. Ihr Definitionsbereich ist aber nicht $\mathbb{R}$, sondern $\mathbb{R} \setminus N(b)$.

Bei der Interpretation von rationalen Funktionen als Funktionen ergeben sich zwei Probleme:

- Der Definitionsbereich hängt vom ausgewählten Nenner ab.
- Beim Rechnen mit diesen Funktionen sollten immer beide Summanden oder Faktoren sowie deren Summe und Produkt denselben Definitionsbereich haben.

Diese Probleme können so gelöst werden: Wir setzen diese Funktionen irgendwie auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Dann fassen wir zwei Funktionen, deren Funktionswerte sich nur an endlich vielen Stellen unterscheiden, als gleich auf (betrachten also nicht Funktionen, sondern gewisse Äquivalenzklassen von Funktionen).

3.6. Brüche weiterer Funktionen

Auf diese Weise können auch „Quotientenkörper“ von weiteren Mengen von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die unter Addition und Multiplikation abgeschlossen sind, betrachtet werden, zum Beispiel:
Brüche von allen Funktionen, deren Nullstellenmenge endlich ist (Polynomfunktionen und Exponentialfunktionen haben diese Eigenschaft), oder
Brüche von allen Funktionen, deren Nullstellenmenge abzählbar ist (die Sinus- und Cosinusfunktion haben diese Eigenschaft).

Es ist aber nicht möglich, einen „Quotientenkörper“ der Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ zu bilden: Es gibt Funktionen $f \neq 0$, $g \neq 0$ so, dass $f \cdot g = 0$ ist.
Dann hätten die Brüche $\frac{1}{f}$ und $\frac{1}{g}$ Nenner ungleich 0, aber ihre Summe und ihr Produkt könnten dann nicht $f \cdot g = 0$ als Nenner haben.

Beispiel: Das Produkt von f mit $f(t) := t - |t|$ und g mit $g(t) := t + |t|$ ist 0, weil für alle reellen Zahlen t

$$(f \cdot g)(t) = (t - |t|)(t + |t|) = t^2 - |t|^2 = 0$$

ist.

3.7. Partialbruchzerlegung

Wenn a und b ganze Zahlen bzw. Polynome mit $ggT(a,b) = 1$ sind, können mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus ganze Zahlen bzw. Polynome u, v so berechnet werden, dass

$$u \cdot a + v \cdot b = 1$$

ist.

Dann ist

$$\frac{c}{a \cdot b} = \frac{c \cdot (u \cdot a + v \cdot b)}{a \cdot b} = \frac{c \cdot u}{b} + \frac{c \cdot v}{a}.$$

Diese Zerlegung heißt Partialbruchzerlegung von $\frac{c}{a \cdot b}$. Sie kann noch verfeinert werden, wir belassen es in diesem Beitrag bei dieser groben Form.

Beipiel:

$$\frac{5}{8 \cdot 11} = -\frac{1}{8} + \frac{2}{11}$$

Beipiel:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1) \cdot (x^2+1)} = \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{x-1}$$

Die Partialbruchzerlegung wird zum Beispiel bei der Integration rationaler Funktionen (falls der Nenner als Produkt von Linearfaktoren gegeben ist) oder zur Lösung von linearen Anfangswertaufgaben der Ordnung 2 mit Hilfe der Laplace-Transformation verwendet (siehe zum Beispiel Pauer et al., 2014, Kap. 4.5).

Wir danken Reinhard Winkler für das sorgfältige Lesen unseres Manuskripts und zahlreiche Verbesserungsvorschläge.

Literatur

Pauer, F. und Stampfer, F. (2014): Mit Funktionen rechnen – ein wichtiges Thema der Sekundarstufe 2. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)* 47, S. 62–67.

Pauer, F. , F. (2005): Division mit Rest - der heimliche Hauptsatz der Algebra. *Didaktikheft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft ÖMG* 37, S. 100–111.

Pauer, F. et al. (2011): *Mathematik 1 HTL.* Wien: Österreichischer Bundesverlag.

Pauer, F. et al. (2014): *Mathematik 4/5 HTL.* Wien: Österreichischer Bundesverlag.

Wartha, S. (2018). Brüche und Rechenoperationen verstehen oder Bruchrechnen können? *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 26(1), S. 31–37.